第七章 复数

7.1 复数的概念

7.1.1 数系的扩充和复数的概念

对点上分

1. BCD 【解析】由复数的定义可知 $1-ai(a\in\mathbf{R})$ 是一个复数，**故 A 正确**；形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的数，当 $b=0$ 时，它不是虚数，**故 B 错误**；若两个复数都是实数，则可以比较大小，**故 C 错误**；a,b 可以比较大小，所以 a,b 是实数，则 $a+\mathrm{i}$ 和 $b+\mathrm{i}$ 是虚数，两个虚数不能比较大小，**故 D 错误. 故选** BCD.

2. B 【解析】因为 $z=1-2\mathrm{i}$，所以复数 $z=1-2\mathrm{i}$ 的虚部为 -2，**故选** B.

3. ABD 【解析】若 $a=0$，且 $b\neq0$，则 $a+b\mathrm{i}$ 为纯虚数，**故 A 错误**；若 $z=3-2\mathrm{i}$，则 $a=3,b=-2$，**故 B 错误**；若 $b=0$，则 $a+b\mathrm{i}=a$，为实数，**故 C 正确**；若 $a=b=0$，则 z 为实数，也是复数，**故 D 错误. 故选** ABD.

易错警示 对纯虚数的概念理解不透致错

当 $a=0,b\neq0$ 时，复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，故由 $a=0$ 不能推出复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数；复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数，则 $a=0$ 且 $b\neq0$，故由复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数可推出 $a=0$，故 $a=0$ 是复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数的必要不充分条件.

4. C 【解析】复数 $2\mathrm{i}-\sqrt{5}$ 的虚部为 2，又 $\sqrt{5}\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=-2+\sqrt{5}\mathrm{i}$，则 $\sqrt{5}\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2$ 的实部为 -2，所以新复数为 $2-2\mathrm{i}$. **故选** C.

5. B 【解析】因为 $a^2+b+(a-b)\mathrm{i}>2$，根据虚数不能比较大小，可得 $a^2+b+(a-b)\mathrm{i}$ 为实数，所以 $a-b=0$ 且 $a^2+b>2$，即 $a^2+a-2>0$，解得 $a<-2$ 或 $a>1$. **故选** B.

6.【解】(1) 若复数 z 为实数，则 $a^2-4a-21=0$，解得 $a=7$ 或 $a=-3$.

(2)若复数 z 为虚数,则 $a^2-4a-21\neq0$,解得 $a\neq7$ 且 $a\neq-3$,故 a 的取值范围为 $\{a|a\neq7$ 且 $a\neq-3, a\in\mathbf{R}\}$.

(3)若复数 z 为纯虚数,则 $\begin{cases}a^2-6a-7=0,\\a^2-4a-21\neq0,\end{cases}$ 解得 $a=-1$.

易错警示 **根据复数类型求参时遗漏限制条件致错**

根据一个复数的类型求参数值,关键是要弄清楚复数的实部和虚部以及它们对复数分类的影响,然后再结合定义进行求解即可. 注意:复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 为纯虚数时,一定要满足 $a=0$ 且 $b\neq0$.

7. A 【解析】$\sqrt{2}i$ 不是实数,也就不是无理数,故①错误;z_1 和 z_2 都是虚数,且它们的虚部相等,但是实部不一定相等,故②错误;当 $a=b=0$ 时,$(a-b)+(a+b)i$ 为实数,当 $a=b\neq0$ 时,$2bi$ 是纯虚数,故③错误. **故选** A.

归纳总结 **复数相等的本质**

两个复数相等需要这两个复数的实部和虚部分别相等才可以,对于复数相等的题型,一般先化简并准确找出这两个复数的实部和虚部,再令其分别相等.

8. B 【解析】纯虚数是复数,不是实数,不能比较大小,故①错误;两复数相等时,实部一定相等,但实部相等时,复数不一定相等,故②正确;若 $x,y\in\mathbf{R}$,且 $x^2+y^2=0$,则 $x=y=0$,故③错误. **故选** B.

易错警示 **忽略复数标准形式要求致错**

若 $x^2+y^2=0$,如果不指明 x,y 是实数,则不能得出 $x=y=0$. 比如 $x=1+i$,$y=1-i$,此时 $x^2+y^2=0$(涉及复数的四则运算,下节学习)也成立,所以要注意给出复数相等的充要条件的前提是将两个复数都表示成标准形式,即 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$.

9. A 【解析】当 $x=y=1$ 时, $x+yi=1+i$ 显然成立,所以 $x=y=1$ 是 $x+yi=1+i$ 的充分条件;当 $x=i, y=-i$ 时, $x+yi=1+i$, 则 $x=y=1$ 不是 $x+yi=1+i$ 的必要条件. **故选 A.**

易错警示 忽略复数相等的前提条件

本题容易误认为 $x, y\in\mathbf{R}$, 则 $x+yi=1+i$ 的充要条件是 $x=y=1$.

10. 2 【解析】$\because(2x^2-3x-2)+(x^2-5x+6)i=0(x\in\mathbf{R})$, $\therefore\begin{cases}2x^2-3x-2=0 ①,\\x^2-5x+6=0 ②,\end{cases}$ 解①得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{1}{2}$;解②得 $x=2$ 或 $x=3$. $\therefore x=2$.

7.1.2 复数的几何意义

对点上分

1. B 【解析】由 $z=-2+3i$ 可得其在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,3)$. **故选 B.**

2. B 【解析】当 $0<m<1$ 时, $m-1<0$, $1-m>0$,所以复数 $z=m-1+(1-m)i$ 在复平面内对应的点 $(m-1,1-m)$ 位于第二象限. **故选 B.**

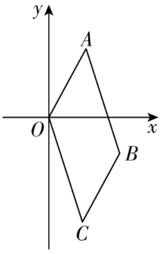
3. D 【解析】复数 $z=(a+2)-(a+3)i$ 在复平面内对应的点 Z 的坐标为 $(a+2,-(a+3))$, 根据第二象限点的坐标特点可得 $\begin{cases}a+2<0,\\-(a+3)>0,\end{cases}$ 解得 $a<-3$. **故选 D.**

4. 1 【解析】复数 $z=-2+ai(a\in\mathbf{R})$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(-2,a)$, 依题意得 $\sqrt{(-2-1)^2+(a-1)^2}=a+2$, 解得 $a=1$.

5. A 【解析】因为复数 $1-i$, $-1+2i$ 在复平面内对应的以原点为起点的向量分别为 $\overrightarrow{OM}=(1,-1)$, $\overrightarrow{ON}=(-1,2)$, 所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=(-1,2)-(1,-1)=(-2,3)$, 则 $\overrightarrow{MN}$ 对应的复数为 $-2+3i$. **故选 A.**

6. A 【解析】设 $z_3=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$, 依题意得 $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $\overrightarrow{AB}=(1,-3)$, 如图所示,由于四边形 $OABC$ 是平行四边形,

所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AB}$,所以向量 $\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为 $1-3\mathrm{i}$,所以 $z_3=1-3\mathrm{i}$. **故选** A.



7. D 【解析】因为向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 $5+3\mathrm{i}$,所以 $\overrightarrow{OA}=(5,3)$. 因为 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OA}$ 关于 y 轴对称,所以向量 $\overrightarrow{OB}=(-5,3)$,对应的复数为 $-5+3\mathrm{i}$,所以点 B 对应的复数是 $-5+3\mathrm{i}$. **故选** D.

规律总结 设复数 $z_1=a+b\mathrm{i}$, $z_2=c+d\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 在复平面上对应的点分别为 Z_1,Z_2. (1) 若 Z_1,Z_2 关于 x 轴对称,则 $a=c,b=-d$; (2) 若 Z_1,Z_2 关于 y 轴对称,则 $a=-c,b=d$; (3) 若 Z_1,Z_2 关于原点对称,则 $a=-c,b=-d$; (4) 若 Z_1,Z_2 关于第一、三象限的角平分线对称,则 $a=d,b=c$. 对应向量的坐标也有上述规律.

8. A 【解析】因为 $z=1+2\mathrm{i}$,所以 $|z|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. **故选** A.

9. A 【解析】由题意得 $|z|=\sqrt{(a-1)^2+(-2a)^2}=5$,即 $5a^2-2a-24=0$,解得 $a=-2$ 或 $a=\dfrac{12}{5}$. 因为 z 在复平面内对应的点位于第二象限,所以 $\begin{cases}a-1<0,\\-2a>0,\end{cases}$ 解得 $a<0$,所以 $a=-2$,**故选** A.

10. AB 【解析】若 $z\in\mathbf{R}$,则 $|z|\geqslant 0$,若 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R},b\neq 0)$,则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}>0$,**故 A 正确**;因为 $|z_1|=\sqrt{5}$, $|z_2|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{5}$, $|z_3|=\sqrt{5}$, $|z_4|=\sqrt{5}$,所以这些复数在复平面内的对应点均在以原点为圆心,$\sqrt{5}$ 为半径的圆上,**故 B 正确**; $|\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta|=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$ 为定值,**故 C 错误**;虚数不能比较大小,

故 D 错误. 故选 AB.

11. 1 【解析】$\because$ 复数 $z_0=\frac{a+2}{2}+\left(\frac{2-a}{2}\right)i$ 是纯虚数，

$\therefore \frac{a+2}{2}=0, \frac{2-a}{2}\neq 0$，解得 $a=-2$，

$\therefore z_0=2i$，其在复平面内对应的点为 $Z_0(0,2)$，

$\because Z$ 为曲线 $|z|=1$ 上的动点，$\therefore$ 点 Z 在以原点为圆心，半径 $r=1$ 的圆上，易知点 $Z_0(0,2)$ 在该圆外，

故点 Z_0 与 Z 之间的最小距离为 $|OZ_0|-r=2-1=1$.

12. C 【解析】由复数的几何意义得 $z=2+3i$，从而 $\bar{z}=2-3i$，其虚部为 -3. **故选** C.

13.【解】依题意，设 $z=-\sqrt{5}+yi, y>0$，则 $|z|=\sqrt{(-\sqrt{5})^2+y^2}=3$，解得 $y=2$，所以 $\bar{z}=-\sqrt{5}-yi=-\sqrt{5}-2i$.

7.1 节测上分

1. D 【解析】由于复数 $-1+i$ 和 $1-i$ 对应的点分别为 $(-1,1)$，$(1,-1)$，所以这两点间的距离为 $\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$. **故选** D.

2. C 【解析】复数 $z=3-4i$ 的虚部为 -4，**故** A **错误**；$|z|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$，**故** B **错误**；$\bar{z}=3+4i$，**故** C **正确**；$z$ 在复平面内对应的点的坐标为 $(3,-4)$，位于第四象限，**故** D **错误. 故选** C.

3. ACD 【解析】由题意得 $z=4-3i$，z 的虚部为 -3，$|z|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$，**故** A，C **正确**，B **错误**；

由复数 z_0 满足 $1\leqslant|z_0|\leqslant|z|=5$，所以点 Z_0 的集合是以原点为圆心，分别以 1 和 5 为半径的两个圆所夹的圆环，**故** D **正确. 故选** ACD.

4. A 【解析】当 $x=1$ 时，复数 $z=(x^2-1)+(x+1)i=2i$ 为纯虚数；当复数 z 为纯虚数时，有 $\begin{cases}x^2-1=0,\\x+1\neq 0,\end{cases}$ 解得 $x=1$. 所以“$x=1$”是“复数 $z=(x^2-1)+(x+1)i$ 为纯虚数”的

充要条件. **故选** A.

5. C 【解析】设 $z=a+bi$, $a,b\in\mathbf{N}$, $2\leqslant|z|\leqslant3$, 即 $4\leqslant a^2+b^2\leqslant9$. 当 $a=0$ 时, $b=2$ 或 $b=3$; 当 $a=1$ 时, $b=2$; 当 $a=2$ 时, $b=0$, $b=1$ 或 $b=2$; 当 $a=3$ 时, $b=0$. 综上所述, 共有 7 个点满足条件. **故选** C.

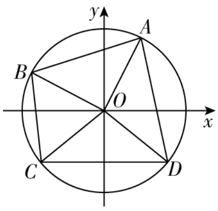
6. B 【解析】因为 $M\cap N\neq\varnothing$, 所以 M 中的 $-3m+(m-3)\mathrm{i}$ 必须为实数, 所以 $m=3$, 此时 $M=\{4,5,-9\}$, 满足题意. **故选** B.

7. B 【解析】由题意得 $Z_1(1,-2)$, $Z_2(a,-1)$, $Z_3(-b,0)$, 所以 $\overrightarrow{Z_1Z_2}=(a-1,1)$, $\overrightarrow{Z_1Z_3}=(-b-1,2)$, 则由三点共线可得 $2(a-1)-(-b-1)=0$, 化简可得 $2a+b=1$. 又 $a>0$, $b>0$, 所以 $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=(2a+b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\right)=4+\frac{b}{a}+\frac{4a}{b}\geqslant4+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}=8$, 当且仅当 $\frac{b}{a}=\frac{4a}{b}$, 即 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{2}$ 时等号成立. **故选** B.

8. $(0,3)$ 【解析】由题意可知, 复数对应的点的坐标为 (m^2-2m-3, m^2-4m), 该点位于第三象限内, 则满足 $\begin{cases}m^2-2m-3<0,\\ m^2-4m<0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}-1<m<3,\\ 0<m<4,\end{cases}$ 所以 $0<m<3$.

9. $3-\mathrm{i}$ 【解析】由题意知 $(n^2+mn)+2n\mathrm{i}=-2-2\mathrm{i}$, 即 $\begin{cases}n^2+mn=-2,\\ 2n=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\ n=-1,\end{cases}$ 所以 $z=m+n\mathrm{i}=3-\mathrm{i}$.

10. $180°$ 【解析】依题意, 点 $A(1,2)$, $B(-2,1)$, $C(-\sqrt{3},-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{3},-\sqrt{2})$, 令原点为 O, 则有 $|OA|=|OB|=|OC|=|OD|=\sqrt{5}$, 则点 A,B,C,D 都在以 O 为圆心, $\sqrt{5}$ 为半径的圆上, 如图, 即四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形, 所以 $\angle ABC+\angle ADC=180°$.



11. 思路导引 (1)根据复数 z_1 对应的点在第一象限,得到不等式,求出 m 的取值范围;(2)根据共轭复数和复数相等得到 $a=m,b=4-m^2$,从而得到 $|z_2|=\sqrt{\left(m^2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$,结合(1)中 $m^2>4$,得到 $|z_2|$ 的取值范围.

【解】(1)复数 z_1 对应的点 Z_1 的坐标为 (m,m^2-4),

因为点 Z_1 在第一象限,所以 $\begin{cases}m>0,\\m^2-4>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$,

提示:坐标平面内第一象限的点的横坐标和纵坐标均为正数

所以 m 的取值范围为 $(2,+\infty)$.

(2)因为 $\overline{z_1}=m+(4-m^2)\mathrm{i}=z_2$,所以 $a=m$,$b=4-m^2$,

所以 $|z_2|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{m^2+(4-m^2)^2}=\sqrt{m^4-7m^2+16}=\sqrt{\left(m^2-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}$,

由(1)知 $m^2>4$,所以 $|z_2|>\sqrt{\left(4-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}=2$,即 $|z_2|$ 的取值范围是 $(2,+\infty)$.

12.【解】(1)$\because z_1=z_2$,$\therefore m=2\cos\theta\in[-2,2]$,又 z_1 为虚数,$\therefore 4-m^2\neq0$,即 $m\neq\pm2$,$\therefore m\in(-2,2)$.

(2)$\because z_1=z_2$,$\therefore \begin{cases}4-m^2=\lambda+3\sin\theta,\\m=2\cos\theta,\end{cases}$ 消去 m 可得 $\lambda=4-4\cos^2\theta-3\sin\theta=4\sin^2\theta-3\sin\theta=4\left(\sin\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{9}{16}$,$\because -1\leqslant\sin\theta\leqslant1$,$\therefore \lambda\in\left[-\frac{9}{16},7\right]$.

7.2 复数的四则运算

7.2.1 复数的加、减运算及其几何意义

对点上分

1. A 【解析】$\because z-3\mathrm{i}=4-\mathrm{i}$,$\therefore z=4-\mathrm{i}+3\mathrm{i}=$

$4+2i$,则 z 的虚部为 2. **故选 A.**

2. A 【解析】∵ $z_1+z_2=a+4i+(-3+bi)=(a-3)+(4+b)i$ 为实数,∴ $4+b=0$,∴ $b=-4$,∵ $z_1-z_2=a+4i-(-3+bi)=(a+3)+(4-b)i$ 为纯虚数,∴ $a+3=0$ 且 $4-b\neq0$,∴ $a=-3$ 且 $b\neq4$,∴ $a=-3,b=-4$. **故选 A.**

3. $4\sqrt{3}$ 【解析】设 $z_1=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,$z_2=c+di(c,d\in\mathbf{R})$,所以 $z_1+z_2=a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$. 又 $|z_1|=|z_2|=|z_1+z_2|=4$,所以 $a^2+b^2=16$,$c^2+d^2=16$,$(a+c)^2+(b+d)^2=a^2+b^2+2ac+c^2+d^2+2bd=16$,所以 $2ac+2bd=-16$. 因为 $z_1-z_2=a+bi-(c+di)=a-c+(b-d)i$,所以 $|z_1-z_2|=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}=\sqrt{a^2+b^2-2ac+c^2+d^2-2bd}=4\sqrt{3}$.

易错警示 误将复数的模的运算当作实数的绝对值运算致错

本题若混淆复数的模的运算和实数的绝对值运算,则会错误地得到 $z_1=z_2=z_1+z_2=\pm4$,从而认为题目无解. 在复数的模的运算中,若 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,则 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$,要注意与实数的绝对值运算的区别.

4. D 【解析】复数 $6+5i$ 与 $-3+4i$ 分别对应向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OB}$,因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$,所以向量 $\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 $(6+5i)-(-3+4i)=9+i$. **故选 D.**

规律总结 复数的几何意义的简单运用

本题考查复数的几何意义的简单运用,难度较低. 复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 和复平面内的点 $Z(a,b)$ 一一对应,同时复数 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 和复平面内的向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$($O$ 为复平面内的原点)也一一对应.

5. A 【解析】设存在 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$,则四边形 $OACB$ 为平行四边形.

$\because$ 非零复数 z_1,z_2 分别对应复平面内的向量 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$，$\therefore$ 由复数加法的几何意义可知 $|z_1+z_2|$ 对应 $|\overrightarrow{OC}|$，$|z_1-z_2|$ 对应 $|\overrightarrow{AB}|$，则 $|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{AB}|$，则平行四边形 $OACB$ 为矩形. $\therefore$ $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$. **故选 A.**

一题多解 易知 $z_2,-z_2$ 在复平面内对应的点 B,B_1 关于原点 O 对称，且 O 为 BB_1 的中点，若 $|z_1+z_2|=|z_1-z_2|$，则 z_1 在复平面内对应的点 A 到这两点的距离相等，即点 A 在 BB_1 的垂直平分线上，所以 $OA\perp OB$. **故选 A.**

6.【解】(1) 由已知得 $\overrightarrow{OA}=(3,2)$，$\overrightarrow{OC}=(-2,4)$，$\therefore$ $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(1,6)$，$\therefore$ 点 B 对应的复数 $z_0=1+6\mathrm{i}$.

(2) 设复数 z 在复平面内所对应的点为 Z. $\because$ $|z-z_0|=1$，$\therefore$ 点 Z 到点 $B(1,6)$ 的距离为 1，$\therefore$ 满足 $|z-z_0|=1$ 的点 Z 的集合是以 $B(1,6)$ 为圆心，1 为半径的圆.

7. B **【解析】**因为 $m(3+\mathrm{i})-(2+\mathrm{i})=3m-2+(m-1)\mathrm{i}$，由题意知点 $(3m-2,m-1)$ 在第一象限，所以 $\begin{cases}3m-2>0,\\m-1>0,\end{cases}$ 解得 $m>1$. **故选 B.**

8. D

思路导引 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，由复数的加、减运算和模长公式可得 $|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|=\sqrt{2x+\dfrac{5}{4}}$，结合 x 的取值范围，即可得出答案.

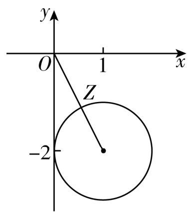
【解析】设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，$z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=x+y\mathrm{i}-\cos\pi-\mathrm{i}\sin\pi=x+1+y\mathrm{i}$，所以 $|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|=|x+1+y\mathrm{i}|=\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{(x+1)^2+\dfrac{1}{4}-x^2}=\sqrt{2x+\dfrac{5}{4}}$，因为 $x^2+y^2=\dfrac{1}{4}$，所以 $-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$，所以 $|z-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}|$ 的最大值为 $\sqrt{2\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{4}}=\dfrac{3}{2}$. **故选 D.**

9. $2+2\sqrt{2}$

攻略上分 观察可知，本题符合通法攻略16中的第2种情况，故可确定好$|z+2-i|=2$所表示的图形后，再分析求解.

【解析】由$|z+2-i|=|z-(-2+i)|=2$，得复数z对应的点在以$(-2,1)$为圆心，半径$r=2$的圆上. 又$|z+i|=|z-(-i)|$表示复数z对应的点到$(0,-1)$的距离，且点$(-2,1)$到点$(0,-1)$的距离$d=\sqrt{(-2-0)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{2}$，所以$|z+i|$的最大值为$d+r=2\sqrt{2}+2$.

10. $\sqrt{5}-1$　【解析】根据复数的几何意义可知，$|z-1+2i|=1$表示复数z在复平面内对应的点在以$(1,-2)$为圆心，1为半径的圆上，而$|z|$表示复数z对应的点Z到原点的距离，画出图形如图所示，$|z|_{\min}=\sqrt{1^2+(-2)^2}-1=\sqrt{5}-1$.



7.2.2　复数的乘、除运算

对点上分

1. C

攻略上分 本题为复数的乘法问题，利用通法攻略17中的思路和技巧求解即可.

【解析】由题意得$z=(2-2i)i=2+2i$，故其虚部为2. **故选** C.

2. A　【解析】设$z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$且$b\neq0$，由$|z|=|z-2|$得$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(a-2)^2+b^2}$，解得$a=1$，所以$z=1+bi$，$\bar{z}=1-bi$，所以$z\cdot\bar{z}=(1+bi)(1-bi)=1+b^2>1$，**故选** A.

3. D　【解析】由$z(3+4i)=1+i$，可得$z=$

$\frac{1+i}{3+4i}=\frac{(1+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\frac{7-i}{25}=\frac{7}{25}-\frac{1}{25}i$，所以 z 在复平面内对应的点为 $\left(\frac{7}{25},-\frac{1}{25}\right)$，位于第四象限，**故选** D.

4. D 【解析】因为复数 $z_1=\frac{7+i}{3+4i}=\frac{(7+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=1-i$，$z_2=3+mi$，所以 $z_1\cdot\overline{z_2}=(1-i)(3-mi)=(3-m)-(m+3)i$，因为 $z_1\cdot\overline{z_2}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}3-m=0,\\m+3\neq0,\end{cases}$ 解得 $m=3$. **故选** D.

规律点拨 复数运算小结论

(1) $(1+i)^2=2i\leftrightarrow\frac{2i}{1+i}=1+i$；

(2) $(1-i)^2=-2i\leftrightarrow\frac{-2i}{1-i}=1-i\leftrightarrow\frac{2i}{i-1}=1-i$；

(3) $(1+i)(1-i)=2\leftrightarrow\frac{2}{1+i}=1-i\leftrightarrow\frac{2}{1-i}=1+i$；

(4) $\frac{1+i}{1-i}=i$，$\frac{1-i}{1+i}=-i$；

(5) $i^1=i$，$i^2=-1$，$i^3=-i$，$i^4=1$.

5. A

攻略上分 本题考查了 $i^n(n\in\mathbf{N}^*)$ 的周期性特点，可利用大招攻略 18 中的相关结论求解.

【解析】因为复数 z 满足 $z(1+i)=i^{2\,024}=1$，所以 $z=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{2}$，故 z 的虚部为 $-\frac{1}{2}$. **故选** A.

6. B 【解析】由题意，$z^2=\left(\frac{i-1}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$，则 $z+z^3+z^5+\cdots+z^{2\,025}=z(1+z^2+z^4+\cdots+z^{2\,024})=z[1+z^2+(z^2)^2+\cdots+(z^2)^{1\,012}]=z[1+(-i)+(-1)+i+1+\cdots+(-i)+(-1)+i+1]=z=\frac{i-1}{\sqrt{2}}$. **故选** B.

7. A 【解析】因为 $2+i$ 是关于 x 的方程

$x^2-mx+n=0$（m,n 为实数）的一个根，则 $2-\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的另一个根，则 $\begin{cases}m=2-\mathrm{i}+2+\mathrm{i}=4,\\n=(2-\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=5,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}m=4,\\n=5,\end{cases}$ 则 $m+n=9$. **故选 A.**

一题多解 由 $2+\mathrm{i}$ 是关于 x 的方程 $x^2-mx+n=0$ 的一个根，得 $(2+\mathrm{i})^2-m(2+\mathrm{i})+n=0$，整理得 $3+n-2m+(4-m)\mathrm{i}=0$，所以 $\begin{cases}3+n-2m=0,\\4-m=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=4,\\n=5,\end{cases}$ 则 $m+n=9$. **故选 A.**

8. AB

攻略上分 本题为复数范围内实系数一元二次方程的相关问题，可利用大招攻略 19 中相关解的结论求解.

【解析】因为 z_1,z_2 是关于 z 的方程 $3z^2-az+b=0$ 的两个复数根，所以 $z_1+z_2=\frac{a}{3}$，$z_1z_2=\frac{b}{3}$，所以 $z_1^2+z_2^2=(z_1+z_2)^2-2z_1z_2=\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}$. 又因为 $z_1z_2=\frac{1}{3}$，$z_1^2+z_2^2=-\frac{2}{9}$，所以 $\begin{cases}\frac{b}{3}=\frac{1}{3},\\\frac{a^2}{9}-\frac{2b}{3}=-\frac{2}{9},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\a=\pm2,\end{cases}$ 因为 $a>0$，所以 $a=2$.

对于 A，由 $3z^2-2z+1=0$，得 $z=\frac{1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}$，不妨取 $z_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，$z_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，所以 z_1 与 z_2 互为共轭复数，**故 A 正确；**

对于 B，$a-b=2-1=1$，**故 B 正确；**

对于 C，$a^2+b^2=4+1=5$，**故 C 错误；**

对于 D，由 A 选项知，$z_1^2-z_2^2=(z_1+z_2)(z_1-z_2)=\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\mathrm{i}$，所以 $|z_1^2-z_2^2|=$

$\frac{4\sqrt{2}}{9}$, 故 D 错误. 故选 AB.

9.【解】(1)因为 $\Delta=(-4)^2-4\times5=-4<0$, 所以 $x_1=\frac{4+\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=2+\mathrm{i}$, $x_2=\frac{4-\sqrt{4}\,\mathrm{i}}{2}=2-\mathrm{i}$.

(2)设关于 x 的方程 $x^2+(1-2\mathrm{i})x+(3m-\mathrm{i})=0(m\in\mathbf{R})$ 有实数根 x_1, 则 $x_1^2+(1-2\mathrm{i})x_1+(3m-\mathrm{i})=0$, 即 $x_1^2+x_1+3m-(2x_1+1)\mathrm{i}=0$, 故 $\begin{cases}x_1^2+x_1+3m=0,\\2x_1+1=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{1}{12},\\x_1=-\frac{1}{2},\end{cases}$ 故 $m=\frac{1}{12}$, 设原方程的另一个根为 x_2, 则 $x_1+x_2=2\mathrm{i}-1$, 所以原方程的另一个根 $x_2=-\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$, 故方程的实数根为 $-\frac{1}{2}$.

规律总结 **在复数范围内解一元二次方程**

在复数范围内解一元二次方程, 求根公式和根与系数的关系仍然是成立的. 用 $\Delta=b^2-4ac$ 判别根的情况, 对于实系数的一元二次方程成立, 但是对于虚系数的一元二次方程不成立.

名师点拨 **在复数范围内解方程的一般思路**

在复数范围内解方程的一般思路是依据题意设出方程的根, 然后代入方程, 利用复数相等的充要条件求解即可.

对于一元二次方程, 也可以利用求根公式求解, 要注意在复数范围内负数是能开方的, 此外, 根与系数的关系也是成立的. 在解这类题时, 要注意不能利用判别式求解方程中参数的值.

10. BD

攻略上分 本题的 D 选项，可用通法攻略 20 中的复数三角不等式求解.

【解析】$z^2+1=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，其虚部为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，**故 A 错误；**

由 $z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 可得 $\frac{1}{z}=\frac{2}{-1-\sqrt{3}i}=\frac{2(-1+\sqrt{3}i)}{(-1-\sqrt{3}i)(-1+\sqrt{3}i)}=\frac{2(-1+\sqrt{3}i)}{4}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，又 $\bar{z}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以可得 $\frac{1}{z}=\bar{z}$，**故 B 正确；**

$z^2=\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$|z|^2=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|^2=1^2=1$，**故 C 错误；**

设 $w=x+yi,x,y\in\mathbf{R}$，则由 $|w-z|=2$ 可得 $|w|=\sqrt{x^2+y^2}=|w-z+z|\geqslant||w-z|-|z||$，$|w|$的最小值为$|2-1|=1$，**故 D 正确. 故选 BD.**

7.2 节测上分

1. B 【解析】由题意得 $z_1=1+2i,z_2=2+i$，$z_2-z_1=2-1+i-2i=1-i$，故 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 $1-i$. **故选 B.**

一题多解 由题意得 $\overrightarrow{Z_1Z_2}=(2,1)-(1,2)=(1,-1)$，故 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 对应的复数为 $1-i$. **故选 B.**

2. D 【解析】$\because z(3+i)=3+i^{2\,024}$，$i^{2\,024}=(i^2)^{1\,012}=(-1)^{1\,012}=1$，

$\therefore z(3+i)=4$，

$\therefore z=\frac{4}{3+i}=\frac{4(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{6}{5}-\frac{2}{5}i$，

$\therefore \bar{z}=\frac{6}{5}+\frac{2}{5}i$，

$\therefore z$ 的共轭复数 $\bar{z}$ 的虚部为 $\frac{2}{5}$.

故选 D.

3. D 【解析】设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R})$，则 $2z+\bar{z}=2(a+bi)+a-bi=3a+bi=-3-2i$. 所以 $a=-1,b=-2$，故 $z=-1-2i$，**故选** D.

名师点拨 **求解与复数概念相关问题的技巧**

复数的分类、复数相等、复数的模及共轭复数的概念都与复数的实部、虚部有关，所以解答与复数相关概念有关的问题时，需把所给复数化为代数形式，即 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$ 的形式，再根据题意求解.

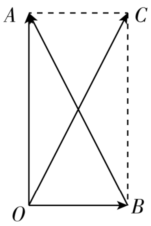
4. A 【解析】因为 $z=2-i$，所以 $\bar{z}=2+i$，所以 $\frac{\bar{z}}{z-\bar{z}}=\frac{2+i}{2-i-(2+i)}=\frac{2+i}{-2i}=\frac{(2+i)\cdot i}{(-2i)\cdot i}=\frac{-1+2i}{2}=-\frac{1}{2}+i$. **故选** A.

5. ABD 【解析】$z=(1-ai)(3+2i)=3+2a+(2-3a)i$,

若复数 z 为纯虚数，则 $3+2a=0$ 且 $2-3a\neq0$，得 $a=-\frac{3}{2}$，**故 A 正确**；若复数 z 为实数，则 $2-3a=0$，得 $a=\frac{2}{3}$，**故 B 正确**；若复数 z 的模为 $\sqrt{13}$，则 $(3+2a)^2+(2-3a)^2=13+13a^2=13$，解得 $a=0$，**故 C 错误**；若复数 z 在复平面内对应的点在第一象限，则 $3+2a>0$ 且 $2-3a>0$，解得 $-\frac{3}{2}<a<\frac{2}{3}$，**故 D 正确. 故选** ABD.

6. C 【解析】设 O 为复平面内的原点，$\overrightarrow{OA}$ 对应的复数为 z_1，$\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_2，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1+z_2，$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ 对应的复数为 z_1-z_2，又 $|z_1|=2\sqrt{5}$，$|z_2|=\sqrt{5}$，且 $|z_1-z_2|=5$，所以由勾股定理逆定理可知 $\triangle AOB$ 为直角三角形，且 $|\overrightarrow{BA}|=5$. 作长方形 $AOBC$，如图所示，则 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ 对应的复数为 z_1+z_2，故 $|z_1+z_2|=$

$|\overrightarrow{OC}|=|\overrightarrow{BA}|=5$. 故选 C.



7.【解】(1)由题意知 $z_1+z_2=3-2i$, $z_1-z_2=-1$, $z_1\cdot z_2=(1-i)(2-i)=1-3i$,

故 $A(3,-2)$, $B(-1,0)$, $C(1,-3)$, 则 $\overrightarrow{BC}=(2,-3)$, 故 $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{13}$;

(2)因为四点 A,B,C,D 组成平行四边形 $ABCD$, 故 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,

设 $D(x,y)$, 则 $(-4,2)=(1-x,-3-y)$,

即 $\begin{cases}1-x=-4,\\-3-y=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=5,\\y=-5,\end{cases}$ 即 $D(5,-5)$, 即点 D 对应的复数为 $5-5i$;

又 $\overrightarrow{BA}=(4,-2)$, $\overrightarrow{BC}=(2,-3)$,

则 $\cos\langle\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{14}{\sqrt{4^2+(-2)^2}\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$,

即 $\cos\angle ABC=\dfrac{7\sqrt{65}}{65}$.

8.【解】(1)若 α,β 为实数, 则 $\Delta=1-4m\geqslant 0$, 即 $m\leqslant\dfrac{1}{4}$.

由根与系数的关系可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-1,\\\alpha\beta=m,\end{cases}$ 所以 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{1-4m}=3$, 解得 $m=-2$, 符合题意.

若 α,β 为虚数, 则 $\Delta=1-4m<0$, 即 $m>\dfrac{1}{4}$. 由一元二次方程根与系数的关系可得 $\begin{cases}\alpha+\beta=-1,\\\alpha\beta=m.\end{cases}$

设 $\alpha=a+bi$, $\beta=a-bi$ $(a,b\in\mathbf{R}$ 且 $b\neq 0)$, 不妨令 $b>0$, 则 $|\alpha-\beta|=|2bi|=2b=3$, 解

得 $b=\frac{3}{2}$.

因为 $\alpha+\beta=2a=-1$,所以 $a=-\frac{1}{2}$,所以 $m=\alpha\beta=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$,符合题意.

综上,m 的值为 -2 或 $\frac{5}{2}$.

(2)当 α,β 为实数,即 $m\leqslant\frac{1}{4}$ 时,$(|\alpha|+|\beta|)^2=9$,即 $\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|=9$,所以 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2|\alpha\beta|=9$,所以 $1-2m+2|m|=9$. 当 $0\leqslant m\leqslant\frac{1}{4}$ 时,此方程无解;当 $m<0$ 时,$m=-2$.

当 α,β 为一对共轭虚数,即 $m>\frac{1}{4}$ 时,$\beta=\overline{\alpha}$.

由 $|\alpha|+|\beta|=3$,可知 $|\alpha|=\frac{3}{2}$,则 $m=\alpha\cdot\overline{\alpha}=|\alpha|^2=\frac{9}{4}$.

综上,m 的值为 -2 或 $\frac{9}{4}$.

7.3* 复数的三角表示

7.3.1 复数的三角表示式+

7.3.2 复数乘、除运算的三角表示及其几何意义

对点上分

1. C 【解析】因为 $z=-\sin\frac{\pi}{7}+i\cos\frac{\pi}{7}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}+i\sin\frac{9\pi}{14}$,所以所求辐角的主值为 $\frac{9\pi}{14}$. 故 C 正确.

名师点拨 复数的三角形式必须满足的条件

①$r\geqslant0$;②θ 前后一致,可取任意值;③一般 $\sin\theta$ 在后且与 i 相乘;④$\cos\theta$ 与 $i\sin\theta$ 之间用加号连接.

2. B　【解析】$-1-\sqrt{3}\,i=2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$，故 B 正确.

名师点拨 复数的代数形式化为三角形式的步骤

①先求出复数的模；②确定辐角所在的象限；③根据象限求出辐角；④求出复数的三角形式.

3. ABC　【解析】由 $z_2=2\sqrt{2}\cdot(\sin 30^\circ-i\cos 30^\circ)=2\sqrt{2}\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)$，所以 $z_1\cdot z_2=\sqrt{2}(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)\cdot 2\sqrt{2}\cdot(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ)=4(\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ)=4(\cos 0^\circ+i\sin 0^\circ)$，故选 ABC.

4.【解】(1) 原式 $=\sqrt{6}\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$(答案不唯一).

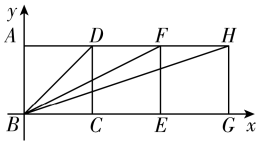
(2) 原式 $=21\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3\pi}{4}\right)\right]=21\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$(答案不唯一).

(3) 原式 $=\frac{6}{3}[\cos(70^\circ-40^\circ)+i\sin(70^\circ-40^\circ)]=2(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$(答案不唯一).

5. B　【解析】由已知得 $z_1=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i=2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$，所以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕原点顺时针旋转 $\frac{3\pi}{4}$ 得 $2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\cdot\left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right]=2(\cos 0+i\sin 0)=2$，又因为 $\overrightarrow{OZ_2}$ 绕原点逆时针旋转 $\frac{4\pi}{3}$ 所得向量与

$\overrightarrow{OZ_1}$ 旋转后所得向量的终点重合,所以 $z_2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=2$,所以 $z_2=\dfrac{2}{\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}}=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}-i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)=-1+\sqrt{3}i$. **故 B 正确.**

6.【证明】以 B 为坐标原点,以 $\overrightarrow{BC}$ 方向为 x 轴的正方向,$\overrightarrow{BA}$ 方向为 y 轴的正方向建立平面直角坐标系,如图所示.



令 $|\overrightarrow{AB}|=1$,可得点 $D(1,1)$,$F(2,1)$,$H(3,1)$,所以 $\overrightarrow{BD}$,$\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{BH}$ 对应的复数分别为 $z_1=1+i$,$z_2=2+i$,$z_3=3+i$,所以 $\angle DBC$,$\angle FBE$,$\angle HBG$ 分别为 z_1,z_2,z_3 的一个辐角,且 $|z_1|=\sqrt{2}$,$|z_2|=\sqrt{5}$,$|z_3|=\sqrt{10}$,可得 $z_1\cdot z_2\cdot z_3=(1+i)(2+i)(3+i)=\sqrt{2}(\cos\angle DBC+i\sin\angle DBC)\cdot\sqrt{5}(\cos\angle FBE+i\sin\angle FBE)\cdot\sqrt{10}(\cos\angle HBG+i\sin\angle HBG)=10[\cos(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)+i\sin(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)]=10i=10\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$,又因为 $(\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG)\in(0,2\pi)$,所以 $\angle DBC+\angle FBE+\angle HBG=\dfrac{\pi}{2}$.

真题上分

1. C　【解析】$(1+5i)i=i+5i^2=-5+i$,则虚部为 1. **故选 C.**

2. A　【解析】由 $z=1+i$,得 $\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{i^2}=-i$. **故选 A.**

3. C　【解析】因为 $\dfrac{z}{z-1}=1+i$,所以 $z=(1+i)(z-1)=(1+i)z-(1+i)$,整理可得,$iz=1+i$,即 $z=\dfrac{1+i}{i}=\dfrac{(1+i)(-i)}{i(-i)}=1-i$. **故选 C.**

一题多解 由 $\frac{z}{z-1}=1+i$，可得 $\frac{z-1+1}{z-1}=1+i$，即 $1+\frac{1}{z-1}=1+i$，所以 $\frac{1}{z-1}=i$，所以 $z-1=\frac{1}{i}=-i$，所以 $z=1-i$，**故选 C.**

4. C 【解析】$\frac{z}{i}=-1-i$，则 $z=i(-1-i)=-i-i^2=1-i$，**故选 C.**

5. A 【解析】因为 $z=5+i$，所以 $\bar{z}=5-i$，所以 $i(\bar{z}+z)=i(5-i+5+i)=10i$，**故选 A.**

6. A 【解析】$z=\frac{1-i}{2+2i}=\frac{(1-i)^2}{2(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{4}=-\frac{1}{2}i$，则 $\bar{z}=\frac{1}{2}i$，$\therefore z-\bar{z}=-\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}i=-i$，**故选 A.**

7. B 【解析】因为 $z=\frac{2+i}{1+i^2+i^5}=\frac{2+i}{1+(-1)+i}=\frac{2+i}{i}=-(2+i)i=1-2i$，所以 $\bar{z}=1+2i$，**故选 B.**

8. C 【解析】$(a+i)(1-ai)=a-a^2i+i+a=2a+(1-a^2)i=2$，所以 $\begin{cases}2a=2,\\1-a^2=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$，**故选 C.**

9. D 【解析】由 $i(1-z)=1$，得 $z=1-\frac{1}{i}=1+i$，所以 $z+\bar{z}=1+i+1-i=2$，**故选 D.**

10. D 【解析】$(2+2i)(1-2i)=2-4i+2i+4=6-2i$，**故选 D.**

11. A 【解析】依题意可得 $1-2i+a(1+2i)+b=0$，根据复数相等的充要条件可得 $\begin{cases}1+a+b=0,\\-2+2a=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-2,\end{cases}$ **故选 A.**

易错警示 两复数相等的充要条件：实部与实部相等，虚部与虚部相等.

12. C 【解析】因为 $z=-1+\sqrt{3}i$，所以 $z\bar{z}=(-1)^2+(\sqrt{3})^2=4$，所以 $\frac{z}{z\bar{z}-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{4-1}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{3}=-\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}i$，**故选 C.**

13. B　【解析】由 $i\cdot z+2=2i$，得 $z=\frac{2i-2}{i}=2+2i$，

则 $|z|=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. 故选 B.

一题多解　由题知 $z=\frac{2i-2}{i}$，则 $|z|=\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2}}{1}=2\sqrt{2}$. **故选** B.

14. C　【解析】由 $z=-1-i$，得 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. **故选** C.

一题多解　由题可得，复数 $z=-1-i$ 在复平面内对应点 $(-1,-1)$. 根据复数的几何意义，$|z|$ 等于点 $(-1,-1)$ 到坐标原点的距离，则 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. **故选** C.

15. A　【解析】$(1+3i)(3-i)=3-i+9i+3=6+8i$，在复平面内对应的点的坐标为 $(6,8)$，位于第一象限，**故选** A.

16. D　【解析】根据复数的几何意义得 $z=-1+\sqrt{3}i$，所以 $\bar{z}=-1-\sqrt{3}i$，**故选** D.

17. $\sqrt{10}$　【解析】因为 $\frac{3+i}{i}=\frac{(3+i)\cdot i}{i^2}=\frac{-1+3i}{-1}=1-3i$，所以 $\left|\frac{3+i}{i}\right|=|1-3i|=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$.

一题多解　$\left|\frac{3+i}{i}\right|=\frac{|3+i|}{|i|}=\frac{\sqrt{3^2+1^2}}{\sqrt{1^2}}=\sqrt{10}$.

素养上分

1. **思路导引**　(1)纯虚数实部为0，虚部不为0，列出方程组进行计算即可；(2)由 $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$，列出等式进行化简计算即可；(3)由 $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\beta=\frac{4}{5}$，$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得出 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\cos\beta=\frac{3}{5}$，代入计算即可.

(1)【解】由 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$，$e^{i\theta}$ 为纯

虚数,

得$\begin{cases}\cos\theta=0,\\ \sin\theta\neq 0,\end{cases}$所以 $\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

(2)【证明】由 $e^{i(\alpha+\beta)}=e^{i\alpha}\cdot e^{i\beta}$,得

$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$

$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$

$=\cos\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta+i\sin(\alpha+\beta)$,

所以 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$.

(3)【解】由 $\cos\alpha=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\sin\beta=\dfrac{4}{5},\alpha,\beta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,得 $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{5},\cos\beta=\dfrac{3}{5}$,

$e^{i(6\alpha-3\beta)}=\cos(6\alpha-3\beta)+i\sin(6\alpha-3\beta)$.

又 $e^{i(6\alpha-3\beta)}=\dfrac{(e^{i\alpha})^6}{(e^{i\beta})^3}=\dfrac{\left(\dfrac{2\sqrt{5}}{5}+\dfrac{\sqrt{5}}{5}i\right)^6}{\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)^3}=\dfrac{\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)^3}{\left(\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i\right)^3}=1$,

所以 $\cos(6\alpha-3\beta)=1$.

2. **思路导引** (1)利用一元三次方程根与系数的关系求解即可;(2)由题意可设 $z_1=0$,由已知计算可令 $z_2=6,z_3=3+4i$,得出三角形三个顶点的坐标,利用等面积法计算即可求得内切圆半径.

【解】(1)令 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-x_2)(x-x_3)$,$x_2<x_3$,利用一元三次方程根与系数的关系可得 $1+x_2+x_3=6,x_2\cdot x_3=6$,解得 $x_2=2,x_3=3$.

(2)根据三次方程根与系数的关系可知,z_1,z_2,z_3 为 $x^3-(9+4i)x^2+(18+24i)x=0$ 的三个根,其中必有一个根为 0,

不妨设 $z_1=0$,则 z_2,z_3 为 $x^2-(9+4i)x+(18+24i)=0$ 的两个根,

分解因式得$(x-6)(x-3-4i)=0$,不妨令 $z_2=6,z_3=3+4i$,

所以$\triangle ABC$的三个顶点为$A(0,0)$，$B(6,0)$，$C(3,4)$，

设$\triangle ABC$内切圆的圆心为I，半径为r，

则$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle IAB}+S_{\triangle IBC}+S_{\triangle IAC}$，即$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AB|+|BC|+|CA|)\cdot r$.

因为$|AB|=6$，$|BC|=5$，$|CA|=5$，$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times6\times4=12$，

所以$r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{|AB|+|BC|+|CA|}=\frac{3}{2}$.

3. 3

思路导引 设$z=\cos\theta+i\sin\theta$，利用乘方和复数相等列方程组求解即可.

【解析】不妨设$z=\cos\theta+i\sin\theta$，$\theta\in[0,2\pi)$，

由题意可知$\begin{cases}\sin n\theta=\sin\theta,\\ \cos n\theta=\cos\theta+\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\sin^2\theta+(\cos\theta+\sqrt{2})^2=1\Rightarrow\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

①若$\theta=\frac{3\pi}{4}$，可知$3\theta=\frac{9\pi}{4}$满足条件，即n的最小值为3（验证可知n小于3时不满足条件）.

②若$\theta=\frac{5\pi}{4}$，可知$3\theta=\frac{15\pi}{4}$满足条件，即n的最小值为3（验证可知n小于3时不满足条件）.

综上可知$n=3$.

4. $6+8t,t\in\mathbf{N}$

思路导引 设模为1的复数根为$z=\cos\theta+i\sin\theta$，代入方程可得$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(n+1)\theta-\cos n\theta-1=0,\\ \sqrt{2}\sin(n+1)\theta-\sin n\theta=0,\end{cases}$据此可得$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\cos n\theta=0$，$\cos(n+1)\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，然后取$\theta=\frac{\pi}{4}$，可得$n$的可能取值，由$n$为正整数可得答案.

【解析】设模为1的复数根为$z=\cos\theta+i\sin\theta$，

由题意得$\sqrt{2}[\cos(n+1)\theta+\mathrm{i}\sin(n+1)\theta]-(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)-1=0$,

所以$\begin{cases}\sqrt{2}\cos(n+1)\theta-\cos n\theta-1=0,\\ \sqrt{2}\sin(n+1)\theta-\sin n\theta=0,\end{cases}$

故$(\cos n\theta+1)^2+\sin^2 n\theta=2$,

所以$\cos^2 n\theta+\sin^2 n\theta+2\cos n\theta+1=2$,

即$\cos n\theta=0$,则$\cos(n+1)\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又$[\sqrt{2}\cos(n+1)\theta-\cos n\theta]^2+[\sqrt{2}\sin(n+1)\theta-\sin n\theta]^2=1$,

所以$3-2\sqrt{2}[\cos(n+1)\theta\cos n\theta+\sin(n+1)\theta\sin n\theta]=1$.

所以$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由三角函数的周期性、奇偶性可取$\theta=\dfrac{\pi}{4}$,由$\cos n\theta=0$,

可得$\dfrac{n\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$,$k\in\mathbf{N}$,即$n=2+4k$,$k\in\mathbf{N}$.

由$\cos(n+1)\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

可得$\dfrac{(n+1)\pi}{4}=\dfrac{\pi}{4}+2m\pi$,$m\in\mathbf{N}$或$\dfrac{(n+1)\pi}{4}=\dfrac{7\pi}{4}+2t\pi$,$t\in\mathbf{N}$,

则$n=8m$,$m\in\mathbf{N}$或$n=6+8t$,$t\in\mathbf{N}$,

令$2+4k=8m$,即$2m-k=\dfrac{1}{2}$,

因为$m,k\in\mathbf{N}$,所以$2m-k\in\mathbf{N}$,则$2m-k\neq\dfrac{1}{2}$;

令$2+4k=6+8t$,即$k=2t+1$,

所以$n=2+4(2t+1)=6+8t$,$t\in\mathbf{N}$.

综上,满足题意的所有正整数n为$6+8t$,$t\in\mathbf{N}$.

5. **思路导引** 设z_1,z_2,z_1+2z_2对应的点分别为$P,Q,M,A(2,0),B(0,2)$,由题意知$|AB|=2\sqrt{2}$,$|OQ|=1$,且$|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|=2|\overrightarrow{OQ}|=|\overrightarrow{PM}|=2$,即可分析出点$M$的轨迹,最后利用矩形和圆的面积公式求面积即可.

【解】在复平面内，设 z_1 对应的点为 P，点 P 在线段 AB 上运动，

其中 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$|AB|=2\sqrt{2}$，

设 z_2 对应的点为 Q，

点 Q 在以坐标原点为圆心的单位圆上运动，$|OQ|=1$，

设 z_1+2z_2 对应的点为 M，则 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}$，

所以 $|\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OP}|=2|\overrightarrow{OQ}|=2$，则 $|\overrightarrow{PM}|=2$，

即点 M 在以 P 点为圆心、2 为半径的圆上运动，当点 P 在线段 AB 上运动时，

点 M 在复平面上扫过的图形为一个矩形（长、宽分别为 4 和 $2\sqrt{2}$）和两个半圆（半径为 2），

面积为 $2\sqrt{2}\times4+\pi\cdot2^2=8\sqrt{2}+4\pi$.

第七章 全章上分

1. D 【解析】因为$(1-3i)(3+i)=3-8i-3i^2=6-8i$,所以它对应的点为$(6,-8)$,位于第四象限. **故 D 正确.**

2. C 【解析】$z=1-2i$ 的共轭复数为 $\bar{z}=1+2i$,**故 A 错误;**

$z=3+i$ 不是纯虚数,**故 B 错误;**

$z=3+i$ 的实部为 3,虚部为 1,所以实部大于虚部,**故 C 正确;**

$z=1-2i$ 的虚部为-2,**故 D 错误.**

3. C 【解析】$\because$ 复数 $z=\left(\cos\theta-\frac{4}{5}\right)+\left(\sin\theta-\frac{3}{5}\right)i$ 是纯虚数,$\therefore \cos\theta-\frac{4}{5}=0$,$\sin\theta-\frac{3}{5}\neq 0$,$\therefore \cos\theta=\frac{4}{5}$,$\sin\theta=-\frac{3}{5}$,$\therefore \tan\theta=-\frac{3}{4}$,则 $\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{-\frac{3}{4}-1}{1-\frac{3}{4}}=-7$. **故 C 正确.**

4. D 【解析】$\frac{-2+ai}{i}=\frac{(-2+ai)\cdot(-i)}{i\cdot(-i)}=a+2i$,$\because \frac{-2+ai}{i}$ 与 $3+bi$ 互为"共胚复数",$\therefore a=-3,b=2$. 则 $a+b=-1$. **故 D 正确.**

5. A 【解析】因为 $z=\frac{3+4i}{2+i}$,所以 $|z|=\left|\frac{3+4i}{2+i}\right|=\frac{|3+4i|}{|2+i|}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$,

由共轭复数的性质知,$|\bar{z}|=|z|=\sqrt{5}$. **故 A 正确.**

6. C 【解析】因为$(2-i)\alpha=3-4i$,所以 $\alpha=\frac{3-4i}{2-i}=2-i$,且 $\beta=m-i$,$m>0$,则 $\alpha+\beta=2+m-2i$.

又因为 $\alpha+\beta$ 是关于 x 的方程 $x^2-nx+13=0(n>0)$的一个根,可知 $2+m+2i$ 是方程的另一个根,由根与系数的关系可得

$$\begin{cases}(2+m-2i)(2+m+2i)=(2+m)^2+4=13,\\(2+m-2i)+(2+m+2i)=4+2m=n,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}m=1,\\n=6\end{cases}$或$\begin{cases}m=-5,\\n=-6\end{cases}$(舍去),所以 $m+$

$n=7$. **故 C 正确.**

7. C 【解析】若 z_1,z_2 皆是实数,则 z_1-z_2 一定不是虚数,因此当"z_1-z_2 为虚数"成立时,"z_1,z_2 中至少有一个为虚数"成立,即必要性成立;当 z_1,z_2 中至少有一个为虚数时,z_1-z_2 不一定是虚数,如 $z_1=z_2=\mathrm{i}$,即充分性不成立. **故 C 正确.**

8. C 【解析】$z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\cos\frac{2\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$,则 $z^{2\,024}=\cos\left(2\,024\times\frac{2\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(2\,024\times\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{4\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,其虚部为$-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **故 C 正确.**

9. BC 【解析】设 $z=a+b\mathrm{i}(a>0,b>0,a,b\in\mathbf{R})$,由 $|z|=|z-1|=1$,得 $\begin{cases}a^2+b^2=1,\\(a-1)^2+b^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$(舍去),$\therefore z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,复数 z 的虚部为$\frac{\sqrt{3}}{2}$,**故 A 错误;**

$\frac{1}{z}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,**故 B 正确;**

$z^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+\frac{3}{4}\mathrm{i}^2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}-1=z-1$,**故 C 正确;**

$\bar{z}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,**故 D 错误.**

10. ACD 【解析】设 $z_1=a+b\mathrm{i},z_2=c+d\mathrm{i},a,b,c,d\in\mathbf{R}$,则 $\overline{z_1}=a-b\mathrm{i},\overline{z_2}=c-d\mathrm{i}$,对于 A,$\overline{z_1+z_2}=\overline{(a+b\mathrm{i})+(c+d\mathrm{i})}=\overline{(a+c)+(b+d)\mathrm{i}}=(a+c)-(b+d)\mathrm{i}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$,**故 A 正确;**

对于 B,取 $z_1=2\mathrm{i},z_2=\mathrm{i}$,满足 $|z_1|>|z_2|$,而

$z_1^2=-4<-1=z_2^2$，**故 B 错误；**

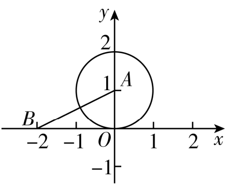
对于 C，$z_1z_2=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$，$|z_1z_2|=\sqrt{(ac-bd)^2+(bc+ad)^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}=|z_1||z_2|$，**故 C 正确；**

对于 D，若 $|z-2i|\leqslant\sqrt{2}$，则复平面内表示复数 z 的点的集合是以 $(0,2)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆及其内部，因此点 Z 的集合所构成的图形的面积为 2π，**故 D 正确.**

11. BD 【解析】对于 A，将 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕点 O 按逆时针方向旋转 $90°$ 得到 $\overrightarrow{OZ_2}$，则 $\overrightarrow{OZ_2}$ 对应的复数为 $(\sqrt{3}+i)(\cos 90°+i\sin 90°)=(\sqrt{3}+i)\cdot i=-1+\sqrt{3}i$，**故 A 错误；**

对于 B，设 $z=a+bi(a,b\in\mathbf{R},b\neq0)$，则 $\bar{z}=a-bi$，所以 $z\cdot\bar{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$，因为 $|z|^2=a^2+b^2$，所以 $z\cdot\bar{z}=|z|^2$，**故 B 正确；**

对于 C，设 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$，如图所示，由 $|z-i|=1$ 可知复数 z 在复平面内对应的点的集合表示以 $A(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，所以 $|z+2|$ 表示圆上的点 (x,y) 到点 $B(-2,0)$ 的距离，又 $|AB|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$，所以 $|z+2|$ 的最大值为 $\sqrt{5}+1$，**故 C 错误；**



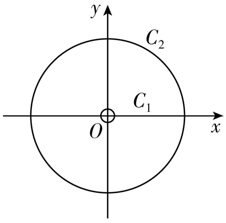
对于 D，$z=-3-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right)=2\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$，所以辐角的主值为 $\dfrac{7\pi}{6}$，**故 D 正确.**

12. 6 【解析】由题意得 $\begin{cases}x^2-5x-6=0,\\x-1\geqslant0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}(x-6)(x+1)=0,\\x\geqslant1,\end{cases}$ 解得 $x=6$.

13. $-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 【解析】$\left(\dfrac{\sqrt{3}i-1}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，

$\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right)^3=\frac{-1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=1$，即 $\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right)^{2024}=\left[\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right)^3\right]^{674}\times\left(\frac{\sqrt{3}\mathrm{i}-1}{2}\right)^2=-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$.

14. $[8,10]$ 【解析】根据复数的模的几何意义可知，复数 z_1 在复平面内对应的点在以原点为圆心，1 为半径的圆 C_1 上，复数 z_2 在复平面内对应的点在以原点为圆心，3 为半径的圆上，复数 z_2^2 对应的点在以原点为圆心，9 为半径的圆 C_2 上，则 $|z_1-z_2^2|$ 的几何意义为圆 C_2 上的点到圆 C_1 上的点的距离，作出示意图如图所示，可知 $8\leqslant|z_1-z_2^2|\leqslant10$.



15.【解】(1) $(2-\mathrm{i})(-1+5\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})+2\mathrm{i}=(3+11\mathrm{i})(3+4\mathrm{i})+2\mathrm{i}=-35+45\mathrm{i}+2\mathrm{i}=-35+47\mathrm{i}$.

(2) $z=(1-\mathrm{i})^2+1+3\mathrm{i}=-2\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}=1+\mathrm{i}$，由 $z^2+az+b=1-\mathrm{i}$，得 $(a+b)+(2+a)\mathrm{i}=1-\mathrm{i}$，

$\therefore\begin{cases}a+b=1,\\2+a=-1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-3,\\b=4.\end{cases}$

16.【解】(1) 因为 $x_1=1-2\mathrm{i}$ 是方程的根，所以 $(1-2\mathrm{i})^2+a(1-2\mathrm{i})+b=0$，即 $a+b-3-(4+2a)\mathrm{i}=0$，所以 $\begin{cases}a+b-3=0,\\-4-2a=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-2,\\b=5.\end{cases}$

(2) 设 $z=m+n\mathrm{i}$，$m,n\in\mathbf{R}$，则 $|z|=\sqrt{m^2+n^2}=\sqrt{10}$，所以 $m^2+n^2=10$，①

又 $x_1z=(1-2\mathrm{i})(m+n\mathrm{i})=(m+2n)+(n-2m)\mathrm{i}$ 为纯虚数，所以 $\begin{cases}m+2n=0,\\n-2m\neq0,\end{cases}$ ②

联立①②，解得 $\begin{cases}m=2\sqrt{2},\\n=-\sqrt{2}\end{cases}$ 或

$\begin{cases} m=-2\sqrt{2}, \\ n=\sqrt{2}, \end{cases}$ 所以 $z=2\sqrt{2}-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ 或 $z=-2\sqrt{2}+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$.

17.【解】(1)由 $z(1+\mathrm{i})=2\mathrm{i}$ 得 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=\mathrm{i}(1-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$,$\therefore |z+3-4\mathrm{i}|=|4-3\mathrm{i}|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.

(2)由(1)得 $z=1+\mathrm{i}$,由复数的几何意义得向量 $\overrightarrow{OZ}=(1,1)$,$\overrightarrow{OZ}$ 绕原点 O 逆时针旋转 $\dfrac{\pi}{2}$ 得到的 $\overrightarrow{OZ'}=(-1,1)$,则 $\overrightarrow{OZ'}$ 对应的复数为 $z'=-1+\mathrm{i}$,则 $z\cdot z'=(1+\mathrm{i})\cdot(-1+\mathrm{i})=-2$.

18.【解】(1)$\because z=\log_2(1+m)+\mathrm{i}\log_{\frac{1}{2}}(3-m)$ $(m\in\mathbf{R})$,当 z 在复平面内对应的点在第三象限时,$\begin{cases} \log_2(1+m)<0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(3-m)<0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} 0<1+m<1, \\ 3-m>1, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} -1<m<0, \\ m<2, \end{cases}$

$\therefore m$ 的取值范围是 $(-1,0)$.

(2)当 z 在复平面内对应的点在直线 $x-y-1=0$ 上时,$\log_2(1+m)-\log_{\frac{1}{2}}(3-m)-1=0$,即 $\log_2(1+m)+\log_2(3-m)=1$,

$\therefore \begin{cases} 1+m>0, \\ 3-m>0, \\ (1+m)(3-m)=2, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -1<m<3, \\ m^2-2m-1=0, \end{cases}$ 解得 $m=1-\sqrt{2}$ 或 $m=1+\sqrt{2}$.

19.(1)**【解】**由题意,$|\boldsymbol{\alpha}|=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha}}=\sqrt{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(-\mathrm{i})}=\sqrt{1-\mathrm{i}^2-\mathrm{i}^2}=\sqrt{3}$,$|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}}=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

(2)①**【证明】**设 $\boldsymbol{\alpha}=(a+b\mathrm{i},c+d\mathrm{i})$,$\boldsymbol{\beta}=(e-f\mathrm{i},g-h\mathrm{i})$ $(a,b,c,d,e,f,g,h\in\mathbf{R})$,则 $|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\times\sqrt{e^2+f^2+g^2+h^2}$,$|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=|ae-bf+cg-dh+(ch+dg+be+af)\mathrm{i}|=\sqrt{(ae-bf+cg-dh)^2+(ch+dg+be+af)^2}$. 由于

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(e^2+f^2+g^2+h^2)-(ae-bf+cg-dh)^2-(ch+dg+be+af)^2=(ag-ce)^2+(df-bh)^2+(ah+de)^2+(cf+bg)^2-2(bceh+bdeg+acfh+adfg)\geqslant 2(ag-ce)(df-bh)+2(ah+de)(cf+bg)-2(bceh+bdeg+acfh+adfg)=0$，当且仅当 $ag-ce=df-bh$，$ah+de=cf+bg$ 时等号成立，所以 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|\leqslant|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|$.

②【解】设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，结合①得 $|\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{(a-2b+1)^2+(2a+b+1)^2}=\sqrt{5(a^2+b^2)+2(3a-b)+2}$，$|\boldsymbol{\alpha}|\cdot|\boldsymbol{\beta}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2+2^2}\times\sqrt{1^2+a^2+b^2}=\sqrt{7+7(a^2+b^2)}$，令 $7+7(a^2+b^2)=5(a^2+b^2)+2(3a-b)+2$，化简得 $\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2=0$，即 $a=\frac{3}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，则 $z=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$.